大圓航法的向量代數與球面三角函數求解方法之比較

Compare solutions of vector solutions with solutions of the spherical trigonometry for great circle sailing

曾維國*、彭欽麟**、張維傑***、蔡凱馨****

摘要

向量代數與球面三角函數的公式本質上是相同的，兩者之間差異僅僅在於公式表現的方式不同，為有效率的解決球面航海問題及推導大圓航線相關問題所表示出一系列向量求解公式，並且將相關的向量公式與傳統解決大圓航法的球面三角函數公式做比較，以利航海相關學員及電子海圖程式開發人員能更加瞭解其中數學核心含意。利用計算機代數系統或人工展開向量求解的公式與球面三角函數的計算公式是一致，目前一般的電腦語言都有向量代數的函式庫，因此向量公式非常適合編寫航海應用軟體程式，利用向量編寫程式碼有易讀及簡潔的優點，而且可以避免使用球面三角函數計算航向與經度時所產生第一、三象限及第二、四象限判斷麻煩的問題；傳統上可能因為歷史的原因，航海教學環境總是避免利用向量分析及微積分，僅僅利用球面三角函數的公式解決航海問題，但是現今接受航海教育的學員，幾乎皆要經過專科及大學教育的薰陶才能參加航海人員專業的考試，在臺灣的航海大學教育修業課程中，包含了微積分、高等工程數學及電腦編程等數理課程，因此在航海教學上不應該再避免使用向量代數及微積分。

關鍵字：大地線、大圓航法、大橢圓航法

---

* 曾維國(Wei-Kuo Tseng) ，國立臺灣海洋大學 商船學系 副教授，電子郵件：wilco0917@yahoo.com.tw

** 彭欽麟(Chin-Lin Pen) ，國立臺灣海洋大學 商船學系 博士生

*** 張維傑(Wei-Jie Chang) ，國立臺灣海洋大學 商船學系 碩士生

**** 蔡凱馨(Kai-Hsin Tsai) ，國立臺灣海洋大學 商船學系 碩士生

ABSTRACT

The solutions of spherical trigonometry have equivalent results to the vector solutions for great circle sailing. This paper presents the comparisons between vector methods and spherical trigonometry solutions for the great circle, the problems involved in this comparison include the determination of the true course at any point and the determination of the great circle position by given longitude or distance. The vector solutions yield very compact forms which are very straightforward when compared to spherical trigonometry methods and can be computed numerically in a manner. This vector approach is thus particularly appealing for navigators and designers, as they can help them grasp the core meaning of navigation mathematics.

Key words: Geodesics, Great circle, Vector analysis, Navigation

壹、引言

航空及航海全球性的航行，以兩極略扁的扁球體近似地球做為計算的基礎模型，微軟(Microsoft)及國際事務機器(IBM)兩公司的空間資料庫，也是利用相同的模型進行相關運算，一般如果要精確的計算航線的距離、位置或航向會採用大橢圓航法或大地線，地球橢球面上任意兩點之間的最短距離是大地線，而大橢圓是與大地線十分接近的規則曲線，繞行地球四分之一周的大地線長與大橢圓弧長比較，其誤差約為7米(Earle, M.A., 2006.)，這一誤差對於航程計算來說，可以忽略不計，因此，按地球橢球面上的大橢圓航行是一種最經濟的遠洋航法，但是不管是大橢圓或大地線計算時，都要採用輔助球體輔助計算，首先要計算點位及大圓與赤道面交點向量的地心夾角或大地夾角(Ji B. and Bian S.F., 2007., Earle, M.A., 2011., Tseng, W.K. and Lee, H.S., 2007., Vincenty, T. 1975., Williams, R., 1998.)，然後在進行兩點間距離為相應大地夾角的二項展開級數計算，因此大圓航線不管是在航海、大地測量及地圖製圖等領域都是非常重要的基本計算知識。

對於遠洋航行的船舶來說，一般採用大圓航法，所謂大圓航法,就是視地球為一個球體，則地球面上任意兩點之間的最短距離即為大圓弧長，大圓航程和大圓航向角的計算都可按球面三角形公式進行解算，這種大圓航法已在航海學中專有論述；傳統上，計算大圓問題使用大量的球面三角公式，計算過程冗長且不易瞭解其內涵，而且在計算經度及緯度，時常會發生象限判斷的困擾，而利用向量處理大圓航行問題，計算過程相對邏輯性較強，而且使用三角函數的次數也比較少，另外對於計算經度及緯度不會發生象限混淆的問題。

在大圓航法的向量解法研究文章中，有利用大圓為通過球心的平面，導出大圓方程式以求解大圓上經度緯度關係及求頂點位置(Earle, M.A., 2005., Tseng, W.K. and Lee, H.S., 2010.)，也有探討航向的計算方法(Earle, M.A., 2000., 2008., Tseng, W.K. and Lee, H.S., 2007.)，另外還有探討已知距離的位置向量函數(Nastro, V. and Tancredi, U., 2010., Tseng, W.K. and Lee, H.S., 2007.)，這些文章皆提出很有創建的計算觀念，但是這些文章沒有針對球面三角解法及向量解法的差異及共同點做一個有系統的比較，因此有必要對於兩種求解方法的異同做完整比較。

貳、單位球體與大圓航法相關向量

在單位球面上任何一點P的直角坐標與球面經緯度座標的關係如下：

$$\vec{P}(\varphi,\lambda)=(x,\quad y,\quad z)=(\cos\varphi\cos\lambda,\quad \cos\varphi\sin\lambda,\quad \sin\varphi). \tag{1}$$

，其中 λ，φ 為經度及緯度。

將直角坐標轉換為球面經緯度座標的轉換公式為

$$\vec{P}(x,y,z)=(\varphi,\quad \lambda)=(\mathrm{asin}(z),\quad \mathrm{atan2}(y,x)). \tag{2}$$

令北極的單位向量為下式以利後文的推導：

$$\vec{P}_N=(0,0,1) \tag{3}$$

航海過程中，船舶不斷的前進，因此航向是非常重要的控制要素之一，所謂航向就是在球面上的切平面上，所在位置朝北向量與前進速度向量在所在位置水準平面投影向量的夾角，在任意點 ***P*** 的朝北向量為子午線向北的切線，另外朝東的向量為平行圈向東的切線，分別對向量 ***P*** 的緯度及經度微分（或利用 ***P*** 點向量與北極向量的外積及 ***P*** 點向量與朝東向量的外積）可求得（圖 1），其單位向量分別為：

$$\vec{T}_E=(-\sin\lambda,\cos\lambda,0)=\vec{P}_N\times\vec{P}/\cos\varphi \tag{4}$$

及

$$\vec{T}_N = (-\sin\varphi\cos\lambda, -\sin\varphi\sin\lambda, \cos\varphi) = \vec{P}\times\vec{T}_E \tag{5}$$

單位速度向量為前進方向路徑的切線，朝東及朝北的向量可以形成 ***P*** 點對球面切平面上所有向量的正交基底，因此已知航向 α 可以利用線性組合的方法求得速度向量或路徑的切線向量為

$$\vec{T}_V = \sin\alpha\cdot\vec{T}_E + \cos\alpha\cdot\vec{T}_N . \tag{6}$$

大地線被定義為地球表面兩個點之間的最短路徑，球體上的測地線是大圓。大圓是一個球體和一個平面通過其原點即中心點的交集，確定一條大圓航線一般有兩種條件下，一為已知球面上兩點，二為已知球面上一點及其初航向。一大圓包含於一平面，在球體上平面的法向量可以決定一個大圓。

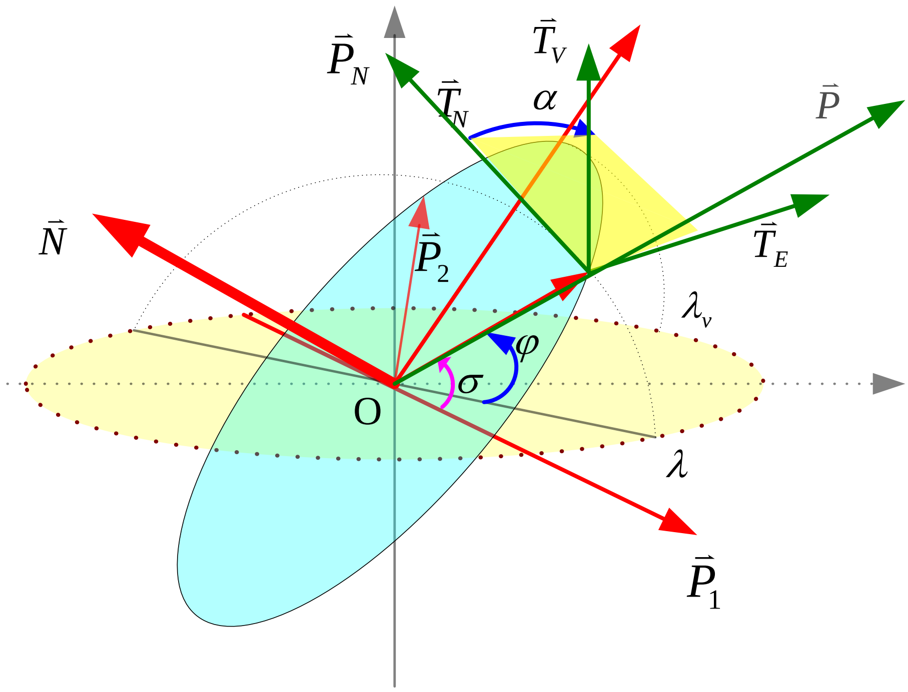

圖 1 大圓法向量及球面上一點切平面上的速度，朝東及朝北切線向量

球面上兩點位置向量的向量外積可以求得大圓平面的法向量為：

$$\vec{N} = \vec{P}_1 \times \vec{P}_2 . \tag{7}$$

球面上一點及該點的速度向量的外積可以求得大圓平面的法向量為：

$$\vec{N} = \vec{P}_1 \times \vec{T}_{V1} \tag{8}$$

其中速度向量為$\vec{T}_{V1} = \sin\alpha_1 \cdot \vec{T}_{E1} + \cos\alpha_1 \cdot \vec{T}_{N1}$（圖 2），***P*** 點向量與其速度向量是正交。

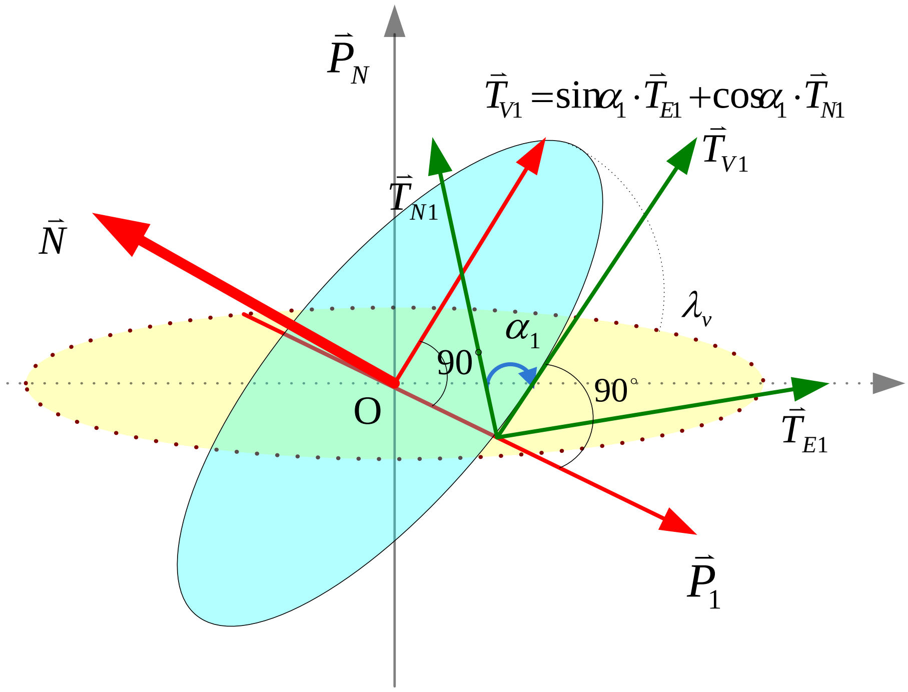

圖 2 已知出發點及航向，大圓上的法向量及速度向量。

在大圓上任意點 P 的速度向量為：

$$\vec{T}_V = \vec{N} \times \vec{P} \tag{9}$$

航向為：

$$\alpha = \mathrm{atan2}(\vec{T}_E \cdot \vec{T}_V, \vec{T}_N \cdot \vec{T}_V) \tag{10}$$

將 $\boldsymbol{P}_1$ 及 $\boldsymbol{P}_2$ 代換 $\boldsymbol{P}$ 點可以得起點及終點的航向為：

$$\alpha_1 = \mathrm{atan2}(\vec{T}_{E1} \cdot \vec{T}_{V1}, \vec{T}_{N1} \cdot \vec{T}_{V1}) \tag{11}$$

及

$$\alpha_2 = \mathrm{atan2}(\vec{T}_{E2} \cdot \vec{T}_{V2}, \vec{T}_{N2} \cdot \vec{T}_{V2})\,. \tag{12}$$

如果僅僅是利用向量計算，上面公式沒有需要展開，但是為了與球面三角的公式比較，這裡利用電腦代數系統或人工將上面兩式展開比較，展開後為:

$$\alpha_1 = \mathrm{atan2}\left[\cos\phi_2\sin(\lambda_2 - \lambda_1),\quad \cos\phi_1\sin\phi_2 - \sin\phi_1\cos\phi_2\cos(\lambda_2 - \lambda_1)\right] \tag{13}$$

及

$$\alpha_2 = \mathrm{atan2}\left[\cos\phi_1\sin(\lambda_2 - \lambda_1),\quad -\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2\cos(\lambda_2 - \lambda_1)\right] \tag{14}$$

利用球面三角的四部公式可得

$$\tan(\alpha_1) = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\cos\phi_1 \cdot \tan\phi_2 - \sin\phi_1 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{15}$$

及

$$\tan(\alpha_2) = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{-\tan\phi_1 \cdot \cos\phi_2 + \sin\phi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{16}$$

球面三角的方法獲得計算式為反正切函數，其值域為$-\pi/2$ 到$+\pi/2$ 之間，因此需要判斷起點與終點的經度關係，這個會造成一些編程的困擾，利用向量的公式及兩參數的正切函數 atan2 可以避免判斷象限的困擾。大圓航線中任意點到出發點的距離為:

$$\cos(\sigma) = \vec{P}_1 \cdot \vec{P} \tag{17}$$

展開後為:

$$\cos\sigma = \sin\phi_1 \sin\phi + \cos\phi_1 \cos\phi \cos d\lambda, d\lambda = \lambda - \lambda_1 \tag{18}$$

這上敘述公式即是球面三角的餘弦定理。

參、大圓上已知經度求緯度及航向

已知經度的位置向量為該子午線的法向量與大圓法向量的外積

$$\vec{P} = (x, \quad y, \quad z) = N \times \vec{N}_\lambda \tag{19}$$

其中子午線法向量 $\vec{N}_\lambda = (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0) = \vec{P}_N \times (\cos\lambda, \sin\lambda, 0)$ 。再利用公式(2)轉換為球面座標的緯度為 $\varphi = \mathrm{atan2}(z, \sqrt{x^2 + z^2})$ ，已知大圓上航點經緯度，利用公式(10)可求得該點航向。如果是已知兩點求取法向量，公式(19)則可以展開後可得到經度與緯度的三角函數關係式。

$$\tan\varphi = \tan(\varphi_1)\frac{\sin(\lambda_2 - \lambda)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} + \tan(\varphi_2)\frac{\sin(\lambda - \lambda_1)}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} \tag{20}$$

或已知出發點其初航向的展開後球面三角公式為

$$\tan\varphi = \tan(\varphi_1)\cos(\lambda - \lambda_1) + \tan(\varphi_{TV_1})\sin(\lambda - \lambda_1) \tag{21}$$

上面兩種經度與緯度的關係式可以取代傳統球面三角推導的關係式。

3.1 傳統上已知大圓經度並利用球面三角公式來得緯度及航向之方式

首先利用航向的公式求得初航向，再利用納比爾法則可求得頂點的緯度及經度差的公式為

$$\cos\varphi_V = \cos\varphi_1 \cdot \sin\alpha_1 \tag{22}$$

及

$$\tan(\lambda_v - \lambda_1) = \cot\alpha_1 / \sin\varphi_1 \tag{23}$$

得到大圓航線的頂點的經緯度後，再利用納比爾法則求得該點的緯度。

$$\tan\varphi = \cos(\lambda_v - \lambda)\cdot\tan\varphi_v \tag{24}$$

再利用四部公式導出的航向公式求得該點的航向為：

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\lambda - \lambda_1)}{-\tan\phi_1\cdot\cos\phi + \sin\phi\cdot\cos(\lambda - \lambda_1)} \tag{25}$$

肆、大圓上已知航程求經度、緯度及航向

航行於大圓上任意點的向量為大圓上任意兩點單位向量的線性組合，由上面已知的向量得知有兩種比較實用的向量組合（圖 3），分別為出發點及終點的向量所得到的正交組合為：

$$\vec{P}(\sigma) = \cos\sigma\cdot\vec{P}_1 + \sin\sigma\cdot\vec{T}_{V1} \tag{26}$$

將 ***P*** 點用終點 $\boldsymbol{P}_2$ 代入得到 $\boldsymbol{P}_1$ 的速度切線向量為：

$$\vec{T}_{V1} = \frac{1}{\sin\sigma_{12}}\vec{P}_2 - \frac{\cos\sigma_{12}}{\sin\sigma_{12}\cdot}\cdot\vec{P}_1 \tag{27}$$

再將此向量代入公式(26)得出發點向量及其切線向量組成的斜交線性組合為：

$$\vec{P}(\sigma) = \frac{\sin(\sigma_{12} - \sigma)}{\sin\sigma_{12}}\cdot\vec{P}_1 + \frac{\sin\sigma}{\sin\sigma_{12}}\cdot\vec{P}_2 \tag{28}$$

位置向量計算後可以經由再利用公式(2)轉換為球面經緯度座標為經緯度。

$$(\varphi,\quad \lambda) = (\mathrm{asin}(z),\quad \mathrm{atan2}(y,x)) \tag{29}$$

已知經度及緯度再利用航向的公式(10)可以求得該點的航向。

爲了與球面三角公式比較，將公式(26)展開可得：

$$\lambda = \operatorname{atan2}\left(\sin\sigma \cdot \sin\alpha_1,\quad \cos\sigma \cdot \cos\varphi_1 - \sin\sigma \cdot \cos\alpha_1 \cdot \sin\varphi_1\right) \tag{30}$$

及

$$\varphi = \operatorname{asin}\left(\cos\sigma \cdot \sin\varphi_1 + \sin\sigma \cdot \cos\alpha_1 \cdot \cos\varphi_1\right) \tag{31}$$

4.1 傳統上已知大圓航程並利用球面三角公式來求解經度、緯度及航向之方式

利用球面三角餘弦定理可得與公式(31)相同求緯度的公式，再利用球面三角的四部公式可以得到已知航行距離求經度公式為：

$$\tan\lambda = \frac{\sin\alpha_1}{\cot\sigma \cdot \cos\varphi_1 - \cos\alpha_1 \cdot \sin\varphi_1} \tag{32}$$

已知經度及緯度再利用航向的公式(25)可以求得該點的航向。

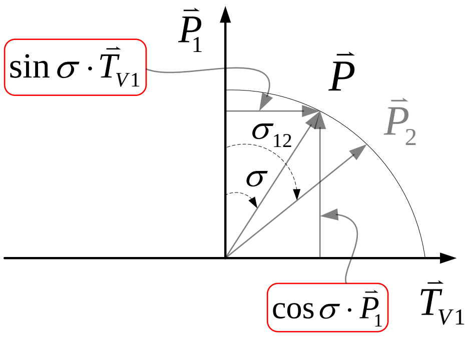

圖 3 大圓上的線性組合

伍、數值測試

首先利用短距離測試向量及球面三角的求解公式，日本沖繩縣那霸港（26.23N,127.68E）到福建省莆田市附近海域(25.30N,19.40E)航程約為 450.74 海里（如

圖 4.a），如果航速為 20 節，約 22.54 小時可以完成航程，途中會經過中國領土釣魚臺列嶼，目前劃歸臺灣宜蘭縣頭城鎮大溪里管轄，其郵遞區號為 290。圖 4 是利用谷歌地圖的應用程式介面(Google Maps API)及腳本語言(Javascript)撰寫網頁程式計算大圓航行問題，其中向量運算的程式讀者可以從網站 http://sylvester.jcoglan.com/ 下載腳本語言 sylvester.js 或自行設計程式以利向量代數的計算。

a.日本沖繩縣那霸港到福建省福州市附近莆田市。

b.相距經度差超過 90 度航線圖。

圖 4 航線示意圖

經過向量求解方式與傳統球面三角函數求解方式計算後，得到表 1，表 1 中可以明顯發現由球面三角公式計算的航向會產生判斷上的困擾，因此建議將球面三角導出的航向公式改為兩參數的反正切函數 atan2【如公式(14)】，修改後計算的結果與向量求解的結果一致，向量求解公式的優點之一是編程容易，而且撰寫程式碼相對來說比較易讀、簡潔及邏輯性強。

表 1 短距離向量及球面三角計算結果

航行距離	緯度	經度	經度(向量)	航向(向量)	航向(球面)
0.00	26.23	127.68	127.68	-95.33	84.67
80.00	26.10	126.20	126.20	-95.99	84.01
160.00	25.95	124.73	124.73	-96.63	83.37
240.00	25.79	123.25	123.25	-97.28	82.72
320.00	25.62	121.79	121.79	-97.91	82.09
400.00	25.43	120.33	120.33	-98.54	81.46
450.74	25.30	119.40	119.40	-98.94	81.06

為比較經度及航向計算的差異，利用長距離測試向量及球面三角的求解公式，從西太平洋某個位置(26.23N,132.32W)到福建省莆田市附近海域(25.30N,19.40E)航程約為 5625.27 海里（如圖 4.b），經過向量求解方式與傳統球面三角函數求解方式計算後得到表 2，表中可以明顯發現當航向在-90 度到-180 度是由球面三角公式計算的航向，會產生判斷上的困擾，當經度差超過 90 度後，經度判斷也出現困擾，對於航向的影響已經變成很難由出發點及目的點的關係判斷，因此建議將球面三角導出的航向及經度公式改為兩參數的反正切函數 atan2【公式(14)及(29)】，修改後計算的結果與向量求解的結果一致。

表 2 長短距離向量及球面三角計算結果

航行距離	緯度	經度	經度(球面)	航向(向量)	航向(球面)
0.00	26.23	-132.32	227.68	-59.35	-59.35
480.00	30.09	-140.28	219.72	-63.11	-63.11
960.00	33.43	-148.83	211.17	-67.63	-67.63
1440.00	36.14	-158.00	202.00	-72.87	-72.87
1920.00	38.11	-167.73	192.27	-78.75	-78.75
2400.00	39.23	-177.88	182.12	-85.10	-85.10

2880.00	39.46	171.77	171.77	-91.67	88.33
3360.00	38.77	161.49	161.49	-98.17	81.83
3840.00	37.21	151.53	151.53	-104.31	75.69
4320.00	34.85	142.08	142.08	-109.88	70.12
4800.00	31.81	133.22	313.22	-114.76	14.65
5280.00	28.19	124.97	304.97	-118.89	6.25
5625.27	25.30	119.40	299.40	-121.40 Nan	

陸、結語

本文全面研究大圓航法的向量求解方法與球面三角求解方法的共通及差異處，向量求解方法除了過程清晰及邏輯性較強之外，還有編程上易讀及易編撰的優勢，向量求解分析可完全導出與大圓航法相關問題的計算公式，另外利用向量的分析可以將傳統的球面三角求解公式包含的反正切函數利用雙參數的反正切函數 atan2 替換，可以解決計算航向及經度時判斷不易得問題。

本文提出的方法可加入大學航海學教本中，大學航海科系的學生一般都修習過向量代數及微積分等課程，利用向量求解大圓航法的觀念應該可以歸類航海專業學生的基本學能之一。

致謝

本篇之部分研究是由中華民國行政院國家科學委員會資助，計畫編號為NSC 98-2410-H-019-019-、NSC 99-2410-H-019-023-、NSC 100-2410-H-019-018-、NSC 101-2410-H-019-025-與102-2410-H-019-016。

參考文獻

1. Ji B. and Bian S.F., 2007. The new Non-iterative Solution to the Geodetic Problem. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 36(3), 269-273.
2. Earle, M.A., 2000. A Vector Solution for Navigation on a Great Ellipse. *The Journal of Navigation*, 53(3), 473-481.
3. Earle, M.A., 2006. Sphere to Spheroid Comparison. *The Journal of Navigation*, 59(3), 491–496.
4. Earle, M.A., 2005. A Vector Solution for Great Circle Navigation. *The Journal of Navigation*, 58(3), 451–457.
5. Earle, M.A., 2008. Vector Solutions for Azimuth. *The Journal of Navigation*, 61(3),

537–545.

6. Earle, M.A., 2011. Accurate Harmonic Series for Inverse and Direct Solutions for the Great Ellipse. *The Journal of Navigation*, 64(3), 557–570.

7. Nastro, V. and Tancredi, U., 2010. Great Circle Navigation with Vectorial Methods. *Journal of Navigation*, 63(3), 557-563.

8. Tseng, W.K. and Lee, H.S., 2010. Navigation on A Great Ellispe. *Journal of Marine Science and Technology*, 18(3), 369-375.

9. Tseng, W.K. and Lee, H.S., 2007. The Vector Function of Traveling Distance for Great Circle Navigation. *Journal of Navigation*, 60(1), 158-164.

10. Tseng, W.K. and Lee, H.S., 2007. Building the Latitude Equation of the Mid-longitude. *Journal of Navigation*, 60(1), 164-170.

11. Vincenty, T. 1975. Direct and Inverse solutions of Geodesics on the Ellipsoid with Application of Nested Equations. *Survey Review*, 22(176), 88-93.

12. Williams, R., 1998. *Geometry of Navigation*. Horwood Publishing, Chichester UK ISBN 1-898563-46-2.