

球面三角的圖解法^{*}

A Graphical Approach for Solving Spherical Triangle

徐嫚謙^{*}、蔡奇呈^{**}、胡依君^{***}、陳志立^{****}

摘要

球面三角學係為航海學的核心數學，而對球面三角的理解在於計算公式和圖解法的相互確認。圖解法就是天文航海學的天子午線圖解，其不僅是定性，更是定量的分析工具。天文球面三角係為地球、天赤道以及天水平等三個座標系統所建構而成，同理地，地文球面三角則是大圈航路的起航點、赤道以及水平等三個座標系統所建構而成；是以球面三角的問題，在已知的起始系統下，若給定(天)赤道系統的變數，則可求得(天)水平系統的變數，反之亦然。至於其應用則分別有天文航海的測天解算法與天體識別等計算以及地文航海的大圈距離、初航向和航路的各轉向點等計算。最後，所有應用皆採用實際的計算例題完整地展示本文所提出的(戴帽)圖解法。

關鍵詞：球面三角、圖解法、天子午線圖解。

^{*} 本文是國立臺灣海洋大學研究計畫(NTOU-108-011)之部分成果，承蒙經費補助，謹此致謝。

^{*} 徐嫚謙 Man-Chian Hsu，國立臺灣海洋大學商船學系碩士。

^{**} 蔡奇呈 Chi-Cheng Tsai，中央警察大學水上警察系助理教授，國立臺灣海洋大學工學博士。

^{***} 胡依君 Yi-Chun Hu，國立臺灣海洋大學商船學系碩士生。

^{****} 陳志立 Chih-Li Chen，國立臺灣海洋大學商船學系教授，國立臺灣大學工學博士。

E-mail: clchen@mail.ntou.edu.tw。

ABSTRACT

Spherical trigonometry is the core mathematics of navigation, and the understanding of spherical triangles lies in the mutual verification of governing formulae and graphical approaches. The graphic approach is the celestial meridian diagram (CMD) in celestial navigation, which is not only a qualitative but also a quantitative analysis tool. The celestial spherical triangle is constructed by the three coordinate systems of the Earth, the celestial equator, and the celestial horizon. Similarly, the terrestrial spherical triangle is constructed by three coordinate systems: the departure of the great circle, the equator, and the horizon. Under a known initial system for the spherical triangles problem, if the variables of the (celestial) equatorial system are given, the variables of the (celestial) horizontal system can be obtained, and vice versa. As for its applications, there are calculations of sight reduction method and star identification in celestial navigation, as well as calculations of the great circle distance, initial course and waypoints on the great circle track in terrestrial navigation. Finally, several practical examples are used to completely demonstrate a graphical approach of this article.

Key words: spherical triangle, graphical approach, celestial meridian diagram.

壹、緒論

球面三角學為航海學的核心理論，其求解方式概分為公式法、表冊法及圖解法，由於表冊係依公式所製作，又可歸類至公式法。1965 年的諾貝爾物理獎得主費曼(Richard Feynman, 1918-1988)曾說：「不管你的理論多漂亮，如果它和實驗不吻合，它就不對。」[1]，就球面三角(以下簡稱球三)而言，若理論為控制公式，那麼實驗則是具體的圖解模型。透過圖解法，將可讓學習者對於球三的立體圖像有更深層地理解，此則引發本研究的起始動機。

球三的形成起源於天文航海學，而其圖解模型就是著名的天子午線圖解(A diagram on the plane of the celestial meridian, CMD)，詳細地閱讀相關教材[2-9]，雖然有圖形模型，但是皆沒有角弧之標示，進一步檢視相關期刊論文[10-14]，它們係藉由圖形，推導出球三公式以求解，其雖有角弧之標示卻沒有量測的顯示，未能完整地展現圖解模型，頗為可惜，此引發本研究的強烈動機。

在天球上的天文球三係由三個座標系統所建構，座標的主要功能在於標示位置，如地球座標系統(Earth system of coordinates, ES)，其描述觀測者位置的變數為緯度與經度；將地球座標系統擴大至天球就是天赤道座標系統(celestial equator system of coordinates, CE)，它描述天體位置的變數則是赤緯與時角；另外，觀測天球上的天體，必須建立以

觀測者為主的天水平座標系統(celestial horizon system of coordinates, CH)，而其描述天體位置的變數則為高度與方位，據此，天文球三即是三座標系統六個變數所組成，將於 2.1 節說明並建構之。六個變數中，任四個變數可推導出 15 條基本球三公式[15]；若進一步能清晰地理解六個變數彼此間關係，則可建構出天子午線圖解(CMD)的立體圖像，且天文球三的任何邊或任何角的角弧均可以採用量測求解，於 3.1 節分步驟詮釋之。

在地球上的地文球三係是天文球三投影至地球面的表現，其應用於大圈航路的相關計算，而三座標則分別變換為起航點、赤道與水平等座標系統，即起航點系統的緯度與經度、赤道系統的大圈航路上位置，如到達點或轉向點，以及水平系統的大圈距離與初航向角。地文球三亦是三座標系統六個變數所形成，同理，也可使用天子午線圖解求解之，將分別於 2.2 節和 3.2 節說明。

除本章緒論外，後續章節安排如下：第貳章將分別建構天文球三與地文球三的三座標系統六個變數的關係圖，且引進球三公式以為確認解集合之用；第參章是實際例題，將依步驟量測並繪製天子午線圖解；最後，結論則臚列於第肆章。

貳、球三的變數關係圖

於 2.1 節和 2.2 節分別說明天文球三與地文球三的組成，繼而分別建立三座標系統及其六個變數關係圖。另外，在 2.3 節依實際例題列出必要的球三公式，它們皆將作為第參章繪製天子午線圖解以求解例題之預備。

2.1 天文球三的變數關係圖

地球座標系統描述觀測者位置的變數為緯度(latitude, L)與經度(longitude, λ)；天赤道座標系統描述天體位置的變數則是赤緯(declination, Dec)與格林威治時角(Greenwich hour angle, GHA)；而天水平座標系統描述天體位置的變數係為高度(altitude, H)與方位(azimuth, Zn)。因天赤道座標系統由地球座標系統擴大至天球形成，當結合天赤道和天水平座標等兩系統，很自然地獲得極重要的組合概念，即「觀測者緯度等於近極的高度」。至此，天文球三的組成元素，三點為天頂(zenith, Ze)、天體位置(celestial body, S)及天極(celestial pole, P)；三邊為餘緯(Co-latitude, $Co-L$)、極距(polar distance, pd)及天頂距(zenith distance, zd)；三角則為子午角(meridian angle, t)、方位角(azimuth angle, Z)及視差角(parallactic angle)，其示意如圖 1 所。為了深入地理解天子午線圖解，構建三座標系統及其六個變數關係圖如圖 2；在已知的(起始)地球座標系統下，若給予天赤道系統的變數，則可求得天水平系統的變數，反之亦然；例如已知地球的觀測者位置，若給予天赤道的天體位置，即可求得天水平的天體位置，此過程就是測天解算法(sight reduction method, SRM)的核心；而在已知地球觀測者位置下，若給予天水平的天體位置，則可求得天赤道的天體位置，該歷程即為天體識別(star identification, SI)。上述兩種情境皆可採用天子午線圖解求解，即「先量測寫入(標繪)天體，後量測讀出(標繪)求解」，其步驟將於 3.1 節展演。

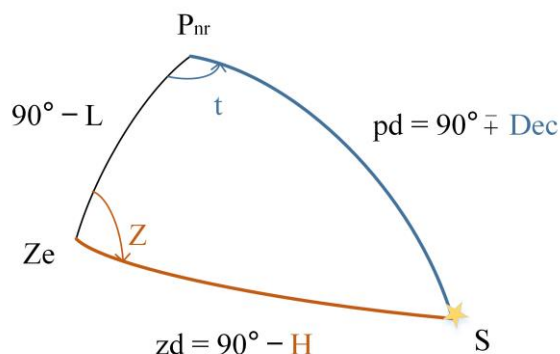


圖 1 天文球三的組成要素

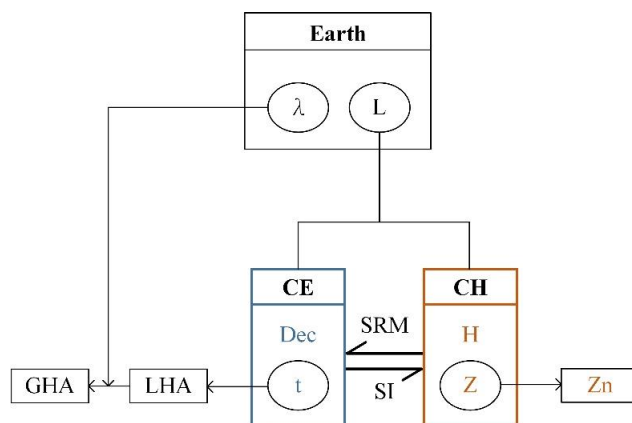


圖 2 天文球三的三座標系統六個變數之關係圖

2.2 地文球三的變數關係圖

地文球三的主要應用在於大圈航路，其組成沿用天文球三概念，地球系統的起航點位置、赤道系統的到達點位置或轉向點位置以及水平系統的大圈距離和初航向角，據此，初階地文球三之元素，三點為起航點(departure, F)、到達點(destination, T)與近極點 (near pole, P_{nr})；三邊為起航點的餘緯(Co-latitude of departure, Co-L_F)、大圈距離(great circle distance, D)及到達點之餘緯(Co-latitude of destination, Co-L_T)；三角則為起航點與到達點的經度差(difference of longitude, DLo)、初航向角(initial course angle, C)及末航向角(final course angle)，其示意如圖 3。在該圖中，若以轉向點(waypoints, X)取代到達點(T)，則此球三可謂為進階地文球三，其示意圖如圖 4 所示。基本上，大圈航路之計算概分為兩大大步驟，第一步驟，已知地球系統的起航點與赤道系統的到達點位置，即可求得水平系統的大圈距離與大圈初航向角，因此初階地文球三的三座標系統及其六個變數關係圖如圖 5；第二步驟，則已知地球系統的起航點與水平系統的初航向角，若給予水平系統的起航點至轉向點的大圈距離(great circle distance from F to X, D_{FX})，則可求得赤道系統各個轉向點位置，該進階地文球三之三座標系統及其六個變數關係圖如圖 6。同樣地，上述兩種情境皆可使用天子午線圖求解，即「先量測寫入(標繪)航路上位置，再量測讀出(標繪)求解」，其步驟將於 3.2 節展示。

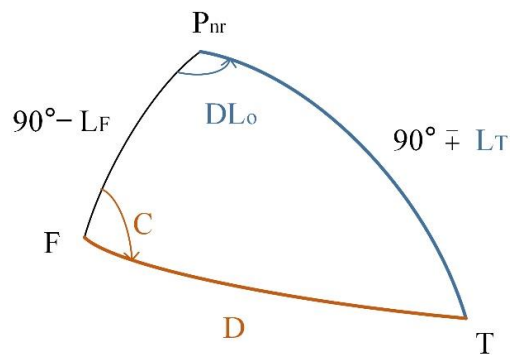


圖 3 初階地文球三的組成要素

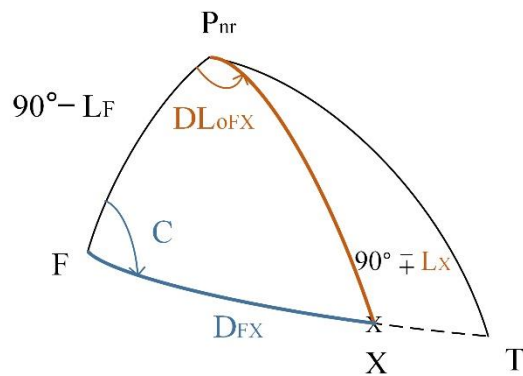


圖 4 進階地文球三的組成要素

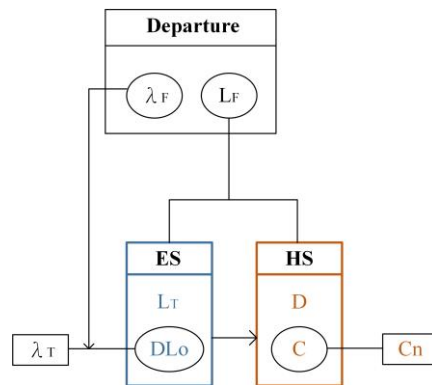


圖 5 初階地文球三的三座標系統六個變數之關係圖

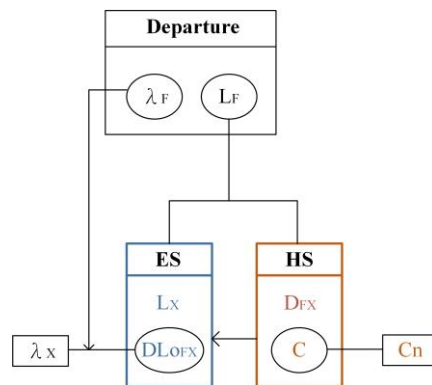


圖 6 進階地文球三的三座標系統六個變數之關係圖

2.3 球三的公式

2.3.1 天文球三

1. 已知地球的觀測者位置，若給予天赤道的天體位置，則可求得天水平的天體位置。如圖 1 所示，觀測者餘緯($Co-L$)、極距(pd)、子午角(t)、天頂距(zd)以及方位角(Z)，值得注意的是，極距與赤緯的關係： $pd = 90^\circ \mp Dec$ ；而天頂距與高度的關係： $zd = 90^\circ - H$ ，那麼，高度(H)及方位(Z)的計算公式分別如下：

$$\cos zd = \cos(Co-L) \cos(pd) + \sin(Co-L) \sin(pd) \cos t, \quad (1)$$

$$\cos Z = \frac{\cos(pd) - \cos(Co-L) \cos(zd)}{\sin(Co-L) \sin(zd)}. \quad (2)$$

2. 已知地球的觀測者位置，若給予天水平的天體位置，則可求得天赤道的天體位置。同理，如圖 1 所示，其極距(pd)及子午角(t)的計算公式分別如下：

$$\cos pd = \cos(Co-L) \cos(zd) + \sin(Co-L) \sin(zd) \cos Z, \quad (3)$$

$$\cos t = \frac{\cos(zd) - \cos(Co-L) \cos(pd)}{\sin(Co-L) \sin(pd)}. \quad (4)$$

值得注意的是，上式的子午角(t)須變換為當地時角(local hour angle, LHA)，再透過經度(λ)變換為格林威治時角(GHA)，如圖 2 所示。

2.3.2 地文球三

大圈航路之計算概分為兩大步驟，分述如下：

1. 步驟一：如圖 3 初階地文球三所示，已知地球系統的起航點(L_F, λ_F)，若給定赤道系統的到達點(L_T, λ_T)，且求得經度差(DLo)，則水平系統的大圈距離(D)與初航向角(C)之計算公式分別如下：

$$\cos D = \sin L_F [\pm \sin L_T] + \cos L_F \cos L_T \cos DLo, \quad (5)$$

$$\cos C = \frac{[\pm \sin L_T] - \sin L_F \cos D}{\cos L_F \sin D} \quad (6)$$

值得注意的是，上兩式中的 $[\pm \sin L_T]$ ，係以起航點緯度(L_F)為主，若到達點(L_T)與之同名，則取正值；若到達點(L_T)與之異名，則取負值。

2. 步驟二：如圖 4 進階地文球三所示，已知地球系統的起航點(L_F, λ_F)，且得知水平系統的初航向角(C)，若給定起航點至轉向點的大圈距離(D_{FX})，則赤道系統的轉向點緯度(L_X)及起航點到轉向點的經度差($DL_{O_{FX}}$)之計算公式分別如下：

$$\sin L_X = \sin L_F \cos D_{FX} + \cos L_F \sin D_{FX} \cos C, \quad (7)$$

$$\cos DL_{O_{FX}} = \frac{\cos D_{FX} - \sin L_F [\pm \sin L_X]}{\cos L_F \cos L_X}, \quad (8)$$

其中，式(8)所求得的經度差($DL_{O_{FX}}$)，透過起航點經度(λ_F)，即可求得轉向點經度(λ_X)，如圖 6 所示。

參、天子午線圖解立體模型

分別採用天子午線圖解以及球三公式求解天文球三以及地文球三的各兩則例題，除互相確認(verification)外，並計算兩方法所得結果之差距；其中天子午線圖解(CMD)係使用 Microsoft Visio 程式繪製。

3.1.天文球三

天子午線圖解係由天赤道座標和天水平座標所組合而成，一般採用「以天水平為主，天赤道為輔。」的原則；就測天解算法(SRM)為例，首先依組合概念，即「觀測者緯度等於近極的高度」來建構天子午線圖解，繼而將天赤道系統的兩變數，先就橫坐標的赤緯(Dec)量測寫入，後將縱座標的子午角(t)量測寫入，即「先橫後縱原則」，此可輕易地在天子午線圖解圖上標註出天體位置，而後，採用天水平系統之思維就該天體位置，先量測讀出橫坐標的高度(H)，後量測讀出縱座標的方位角(Z)，依舊採用「先橫後縱原則」；至於天體識別(SI)，同樣地，依組合概念建立天子午線圖解，繼而將天水平系統的兩變數，先量測寫入橫坐標的高度(H)，後量測寫入縱座標的方位角(Z)，則天體位置可標註在天子午線圖解圖，最後，採用天赤道系統之思維就該天體位置，先量測讀出橫坐標的赤緯(Dec)，後量測讀出縱座標的子午角(t)。

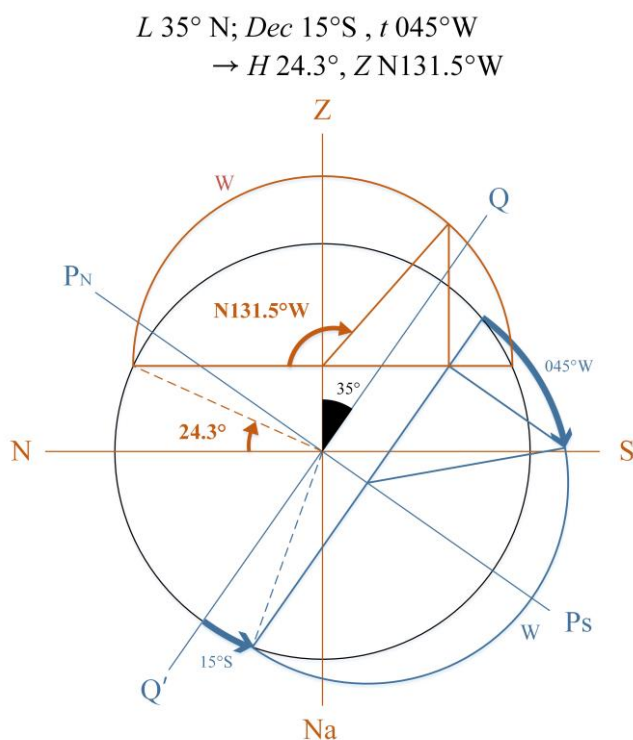


圖 7 測天解算法之天子午線圖解

● 測天解算法

已知觀測者緯度，若給定天赤道座標系統，求解天水平座標系統。

例題 1：已知 $L35^\circ\ N$ ，給定 $Dec15^\circ\ S, LHA045^\circ$ ，求解 H 及 Zn 。

求解：

1. 天子午線圖解法

如圖 7 所示，以組合概念， $L35^\circ\ N$ 建立天子午線圖解；再將天赤道座標的兩變數，即天體赤緯 (Dec) $15^\circ\ S$ 及子午角 (t) $045^\circ\ W$ (由 $LHA045^\circ$ 轉換得知)，依「先橫後縱原則」量測寫入，將天體位置標註於圖上，之後，依舊以「先橫後縱原則」量測讀出天水平座標兩變數，即天體高度 (H) 為 24.3° 與方位角 (Z) $N131.5^\circ\ W$ ，後者轉換為方位 (Zn) 228.5° 。

2. 公式法

依式(1)及式(2)，分別求得天體高度 (H) 為 24.27010389° 與方位角 (Z) $N131.4761586^\circ\ W$ ，後者轉換為方位 (Zn) 228.5238414° 。

$L 30^\circ S; H 40^\circ, Z S140^\circ E$
 $\rightarrow Dec 10.8^\circ N, t 030.1^\circ E$

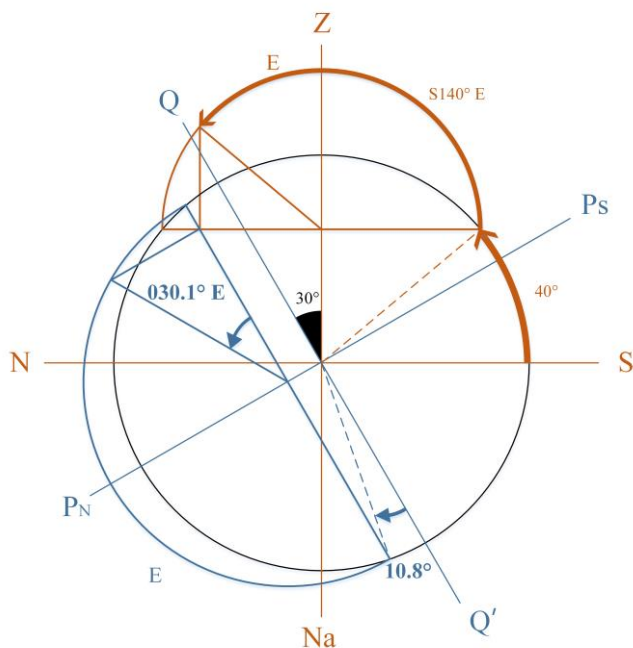


圖 8 天體識別之天子午線圖解

表 1 測天解算法及天體識別求解例題之兩方法結果比較

例題		圖解法	公式法	差距
1	H	24.3°	24.27010389°	0.02989611°
	Z	N131.5°W	N131.4761586°W	0.0238414°
2	Dec	10.8°N	10.7667222°N	0.0332778°
	t	030.1°E	030.08124585°E	0.01875415°

● 天體識別

已知觀測者緯度，若給定天水平座標系統，求解天赤道座標系統。

例題 2：已知 $L30^\circ S$ ，若給定 $H40^\circ, Zn040^\circ$ ，則求解 Dec 及 LHA。

求解：

1. 天子午線圖解法

如圖 8 所示，以組合概念， $L30^\circ S$ 建立天子午線圖解，再依「先橫後縱原則」量測寫入及量測讀出之順序，將天體位置高度(H)40°及方位角(Z)S140°E (由Zn040°轉換得知)，標註於圖上，最後，即可量測讀出天體赤緯(Dec)為 **10.8° N**與子午角(t)030.1° E，後者變換為當地時角(LHA)329.9°。

San Francisco($L_F 37^\circ \text{ N}$, $\lambda_F 122.5^\circ \text{ W}$) to Sydney($L_T 33^\circ \text{ S}$, $\lambda_T 151.5^\circ \text{ E}$)
GCT1 : $L_F 37^\circ \text{ N}$; $L_T 33^\circ \text{ S}$, $DLo 086^\circ \text{ W}$
→ $D 106.3^\circ$, $C N 119.3^\circ \text{ W}$

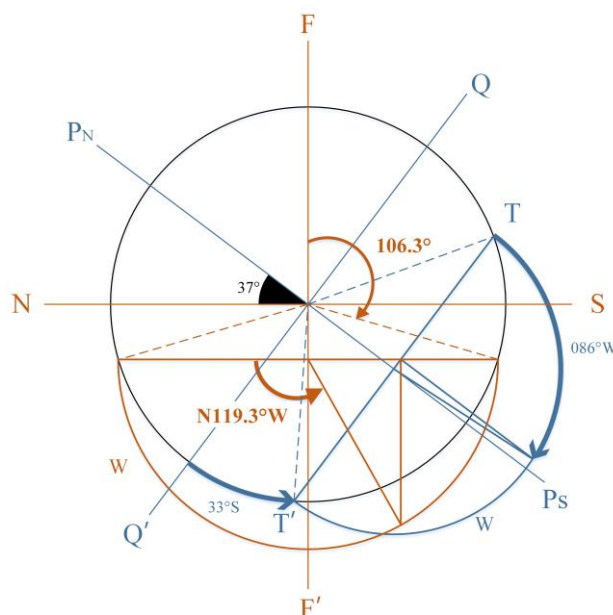


圖 9 初階大圈距離與初航向之天子午線圖解

2. 公式法

依據式(3)以及式(4)，分別計算求得天體赤緯(Dec) $10.7667222^\circ \text{ N}$ 以及子午角(t) $030.0812458^\circ \text{ E}$ ，而後者再轉換為當地時角(LHA) 329.9187542° 。

確認：如表 1 所示，計算結果分述如下。

1. 例題 1 中，高度(H)與方位角(Z)，兩方法計算結果之差距均小於 0.03° 。
2. 例題 2 裡，兩方法計算赤緯(Dec)結果之差距不超過 0.04° ，而子午角(t)則小於 0.02° 。

3.2.地文球三

地文球三應用於求解大圈航路中，其組成沿用天文球三概念，地球系統的起航點位置(L_F , λ_F)、赤道系統的到達點位置(L_T , λ_T)或轉向點位置(L_X , λ_X)以及水平系統的大圈距離(D)和初航向角(C)。

● 初階地文球三

已知大圈航路的起航點與到達點位置，計算該大圈航路的航程及其初航向。

例題 3：自美國 San Francisco($L_F 37^\circ \text{ N}$, $\lambda_F 122.5^\circ \text{ W}$)採用大圈航法開往澳洲 Sydney($L_T 33^\circ \text{ S}$, $\lambda_T 151.5^\circ \text{ E}$)，求解 D 及 C_n 。[改編自 2，頁 616-618]

求解：

San Francisco($L_F 37^\circ N$, $\lambda_F 122.5^\circ W$) to Sydney($L_T 33^\circ S$, $\lambda_T 151.5^\circ E$)
 GCT2 : $L_F 37^\circ N$; $D_{EX} 60^\circ$, $C N 119^\circ W$
 $\rightarrow L_X 02.0^\circ S$, $DLo_{EX} 049.3^\circ W$

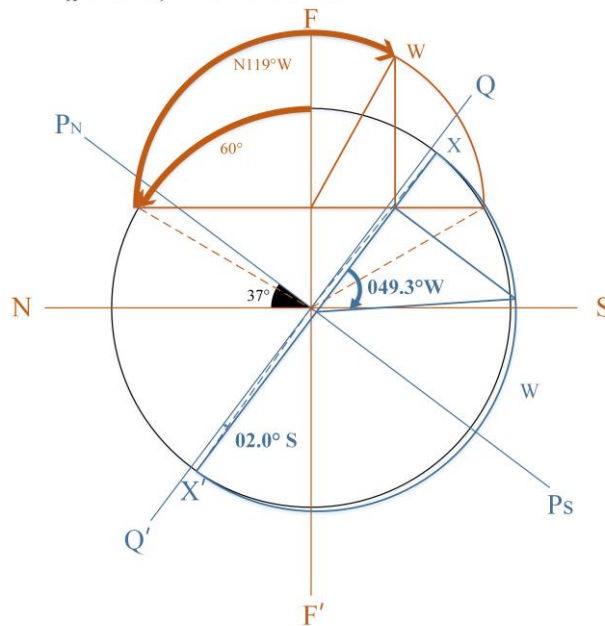


圖 10 進階大圈航路的轉向點之天子午線圖解

1. 天子午線圖解法

如圖 9 所示，以組合概念，起航點緯度(L_F) $37^\circ N$ 建立天子午線圖解；依「先橫後縱原則」量測寫入及量測讀出之順序，即將到達點緯度(L_T) $33^\circ S$ 及經度差(DLo) 086° 標註至圖上到達點位置，最後，可量測讀出大圈距離(D) 106.3° 與大圈初航向角(C) $N119.3^\circ W$ ，後者再轉換為初航向(Cn) 240.7° 。

2. 公式法

依式 (5) 及式 (6)，分別求得大圈距離 (D) 106.3228592° 以及大圈初航向角 (C) $N119.3355262^\circ W$ ，後者再轉換為初航向(Cn) 240.6644738° 。

● 進階地文球三

已知起航點位置，若給定起航點距轉向點之大圈距離，求大圈航路上轉向點位置：

例題 4：承**例題 3** 述，即自美國 San Francisco($L_F 37^\circ N$, $\lambda_F 122.5^\circ W$)，使用大圈航路駛往澳洲 Sydney($L_T 33^\circ S$, $\lambda_T 151.5^\circ E$)。已知採用**整度數**的初航向(Cn) 241° 起航，若自起航點至轉向點的大圈弧為 060° ，則該轉向點的經緯度分別為何？

求解：

1. 天子午線圖解法

如圖 10 所示，以組合概念，起航點緯度(L_F) $37^\circ N$ 建立天子午線圖解；依「先橫後

表 2 大圈航路的求解例題之兩方法結果比較

例題		圖解法	公式法	差距
3	D	106.3°	106.3228592°	0.0228592°
	C	N119.3°W	N119.3355262°W	0.0355262°
4	L _x	02.0°S	01.97168221°S	0.02831779°
	DLo _{FX}	049.3°W	049.27867621°W	0.02132379°

縱原則」量測寫入及量測讀出之順序，即將起航點至轉向點的大圈弧 060°及初航向角 N119°W 嵌繪至圖上轉向點位置，最後，可量測讀出轉向點緯度(L_x)**2.0°S** 及經度差(DLo_{FX})**049.3°W**，後者再轉換為轉向點經度(λ_x)**171.8° W**。

2. 公式法

依據式(7)及式(8)兩公式，分別計算求得轉向點緯度(L_x)01.97168221°S及經度差(DLo_{FX})049.27867621°W，後者再轉換為轉向點經度(λ_x)171.7786762° W。

確認：如表 2 所示，如例題 3 的距離(D)與航向角(C)以及例題 4 的轉向點緯度(L_x)與經度差(DLo_{FX})等四個變數，兩方法的計算結果之差距皆不超過 0.04°。

肆、結論

於球三的相關研究裡，源自天文航海之天子午線圖解一直擔任「綠葉」角色，然在本研究則是以「紅花」之姿，粉墨登場，即採用「量測寫入與量測讀出」，分別對天文球三和地文球三的各兩則實際例題，圖示求解，其建構過程中展現出天子午線圖解的驚奇之處，如**戴帽立體圖像**以及**精確定量方法**(quantitative method)。本研究的結論可歸納如下：

1. 經由天子午線圖解，自然地發現組合概念，「**觀測者緯度等於近極的高度**」，以建立天文球三，進而構建出三座標系統六個變數之關係圖，其為測天解算法和天體識別等兩部分之核心，可導引並繪製天子午線圖解。
2. 承上，亦經由天子午線圖解，採取相同的組合概念，且投影至地球，建立地文的大圈球三，再依求解程序區分為初階地文球三和進階地文球三，分別建構出三座標系統六個變數之關係圖，作為天子午線圖解量測求解大圈航路相關問題之預備。
3. 天文球三的兩則例題，測天解算法和天體識別的天子午線圖解，分別如圖 7 與圖 8 所示；每例題的各兩變數之圖解結果，其與公式法計算結果，兩者差距如表 1 示。所有變數的差距均小於 0.04°，該結果展示了**天子午線圖解**的精確性及其神奇之處。

4. 地文球三求解大圈航路的兩例題，初階大圈距離與初航向與進階大圈航路的轉向點等兩者之天子午線圖解，分別如圖 9 與圖 10 所示；每例題的各兩變數之圖解結果，其與公式法計算結果，兩者差距如表 2 示，所有變數的差距亦皆在 0.04° 之內，該結果再次展現出天子午線圖解的精確性以及其神妙之處。
5. 天子午線圖解之圖示求解過程，係依「先橫後縱原則」的原則，先量測寫入或讀出橫座標的變數，後量測寫入或讀出縱座標的變數，故本擔心後者會受前者之影響，即「誤差傳播效果」，然由表 1 和表 2 的結果，沒有足夠的證據說明誤差傳播之影響，此現象與計算科學的論述是一致的，即驗證了圖解法的寬廣適用性。
6. 若採用公式來描述天文球三或地文球三的應用，則其道理可謂之為「存球三之意，無球三之形」；然而本研究所提出的天子午線圖解有如球三的「法身」(宗教用語)，故本研究則是「形意合一」直視「法身」，以「自出機杼」的天子午線圖解，共同展演了具體之戴帽立體圖像以及定量方法的意義。

本論文的實際算例係為通訊作者講授「天文航海學」的例題，更是當年在德同航運公司實習時的考題，即「在無計算器及表冊的情況下，如何使用繪圖工具直接量測求解天文航海與地文航海等之相關問題？」，故謹以本論文向劉明荃總船長及其船長團隊致敬並感謝；而有學生問到使用圖解法的精確度問題，聯想到大學的恩師薩師洪的名言：“Open sea by palm, coasting by thumb.” 以回應之。

參考文獻

1. 陳文盛，2020，「跳過黑盒子」，*科學人雜誌*，224:26。
2. Bowditch, N., 1984, *American Practical Navigator*, 1984 ed., DMAH/TC.
3. Bowditch, N., 2002, *The American Practical Navigator (Pub. No. 9)*, Bicentennial ed., National Imagery and Mapping Agency (NIMA).
4. Bowditch, N., 2017, *American Practical Navigator (Pub. No. 9)*, 2017 Edition, National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), Springfield, Virginia, USA.
5. Cutler, T. J., 2003, *Dutton's Nautical Navigation*, 15th ed., Annapolis: Naval Institute Press.
6. Royal Navy, 2011, *Admiralty manual of navigation: Astro Navigation*, 10th ed., London: Nautical Institute.
7. 薩師洪，1997，*航海學 第二部天文航海*，文笙書局。
8. 周和平，2013，*天文航海學*，倫悅企業公司。
9. 陳志立、徐國裕，2015，*航海與船舶操縱訓練教材*，海洋大學航訓中心。
10. Chen, C. L., Hsieh, T. H. and Hsu, T. P., 2015, "A Novel Approach to Solve the Great Circle Sailings Based on Rotation Transformation," *Journal of Marine Science and Technology*, 23(1): 13-20.
11. Hsu, T. P., Chen, C. L. and Hsieh, T. H., 2017, "A Graphical Method for Great Circle Routes," *Polish Maritime Research*, 24-1(93): 12-21.
12. Hsieh, T. H., 2017, *Solving and Approximating the Great Circle Track*, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, Taipei.
13. 陳志立、郭倍宏、簡鈺峰，2016，「基於變數變換對測天簡算表的應用程式」，*台灣海事安全與保安研究學刊*，7(3): 1-24。
14. 陳志立、劉續方、簡鈺峰，2016，「基於天子午線平面求解大圈航路的方法」，*台灣海事安全與保安研究學刊*，7(5): 1-15。
15. Clough-Smith, J.H., 1966, *An Introduction to Spherical Trigonometry*, Brown, Son and Ferguson, Ltd., Glasgow.